УДК 622.24.05

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕПЯТСТВИЯ ТИПА УПРУГОСТЬ-МАССА

А.П. Слистин

Юргинский технологический институт ТПУ
E-mail: yftpu@mail.ru

Установлены аналитические зависимости прохождения волн через препятствия, обладающие одновременно упругостью и массой. Получены численные результаты, имеющие хорошее совпадение с экспериментальными данными (ошибка <7 %).

Реальный ударный инструмент представляет собой совокупность последовательно расположенных конечных участков (штанг), имеющих в общем случае скачки площади поперечного сечения, сое динений штанг, их стыков. Любое изменение параметров ударного инструмента можно рассматривать как некоторое препятствие для распространяющейся волны.

Принимая во внимание возможность разложения произвольной волны в ряд Фурье, далее будет рассматриваться прохождение через препятствие простейших гармонических волн. Падение продольной волны на препятствие вызывает появление отраженной волны, бегущей навстречу падающей, и формирование волны за препятствием. В дальнейшем будем обозначать величины, относящиеся к участку ударного инструмента до препятствия индексом 1, а относящиеся к участку после препятствия индексом 2.

Пусть падающая на препятствие гармоническая волна имеет вид $u_{1n}=B_{1n}\cdot e^{i(\omega t-\kappa_1 z)}$, отраженная – $u_{1o}=B_{1o}\cdot e^{i(\omega t-\kappa_1 z)}$, а сформированная за препятствием – $u_{2n}=B_{2n}\cdot e^{i(\omega t-\kappa_2 z)}$. Пусть зависимость продольной силы в падающей волне имеет вид $P_{1n}=D_{1n}\cdot e^{i(\omega t-\kappa_1 z)}$, в отраженной волне – $P_{1o}=D_{1o}\cdot e^{i(\omega t-\kappa_1 z)}$ и в прошедшей волне – $P_{2n}=D_{2n}\cdot e^{i(\omega t-\kappa_2 z)}$. Тогда, принимая во внимание, что $P=ES(\partial u/\partial z)$, амплитуды волн связаны соотношениями

$$B_{1n}=-\frac{D_{1n}}{i\kappa_1 E_1 S_1},\ B_{1o}=\frac{D_{1o}}{i\kappa_1 E_1 S_1},\ B_{2n}=-\frac{D_{2n}}{i\kappa_2 E_2 S_2},\quad (1)$$

где κ – волновое число, E – модуль Юнга, S – площадь поперечного сечения.

Обозначим $V=D_{1o}/D_{1n}$ – коэффициент отражения, $W=D_{2n}/D_{1n}$ – коэффициент прохождения. Отметим, что в практике расчетов находят применение коэффициенты прохождения и отражения по перемещению (скорости) и силе. В данном случае рассматриваются соответствующие коэффициенты по силе. Тогда

$$D_{1o}=V\cdot D_{1n},\quad D_{2n}=W\cdot D_{1n}.\quad (2)$$

То есть знание амплитуды падающей на препятствие волны и коэффициентов отражения и прохождения дает возможность определить амплитуды отраженной и прошедшей волн. Основная задача, рассматриваемая в работе, заключается в отыскании коэффициентов отражения и прохождения по известным свойствам препятствия.

Границу раздела между участками, составляющих препятствие, будем считать резкой. Это не обязательно означает реальный скачок свойств в молекулярном масштабе; переход от свойств одного участка к свойствам другого, происходящий непрерывно в слое, тонком по сравнению с длиной волны, действует на волну, падающую на слой, так же, как и резкий скачок свойств. В качестве характерной толщины слоя можно взять величину λ_0. То есть для волн $\lambda>\lambda_0$ слой толщиной λ_0 и менее можно считать резкой границей.

В монографиях [1, 2] рассмотрено влияние на распространение волн простейших типов препятствий.

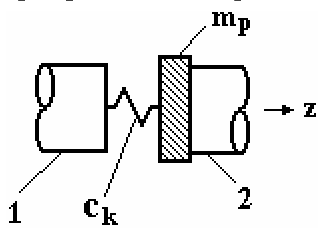


Рис. 1. *Схема препятствия типа упругость-масса*

При забивании труб в грунт удар бойком обычно наносится по пластине, прикрепленной тем или иным способом к торцу трубы. Из требований прочности пластина имеет значительную толщину и, следовательно, массу. Контакт боек-пластина обладает упругостью. Сама пластина под воздействием удара прогибается, что создает дополнительную упругость. Указанное взаимодействие

бойка – 1 с забиваемой трубой – 2 можно смоделировать последовательно расположенными упругим элементом жесткостью C_k и абсолютно жесткой пластиной, обладающей массой m_p, рис. 1.

Без ограничения общности можно считать, что препятствие расположено в сечении z=0. Смещение массы m_p равно торцевому смещению u_2. Согласно второму закону Ньютона

$$m_p \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = P_2 - P_1, \tag{3}$$

где P_2, P_1 – силы, действующие соответственно со стороны прошедшей волны и со стороны падающей. Предполагая упругий элемент линейным, можно записать

$$P_1 = C_k (u_2 - u_1). \tag{4}$$

С учетом (1, 2) равенства (3, 4) эквивалентны уравнениям

$$1+V = \left[1+\frac{im_p\omega^2}{\kappa_2 E_2 S_2}\right]\cdot W,$$

$$1+V = C_k\left(-\frac{W}{i\kappa_2 E_2 S_2}+\frac{1-V}{i\kappa_1 E_1 S_1}\right).$$

В свою очередь эти уравнения образуют систему относительно неизвестных W, V, решение которой дается выражениями

$$W = \frac{2\dfrac{C_k}{i\kappa_1 E_1 S_1}}{\dfrac{C_k}{i\kappa_2 E_2 S_2}+\left(1-\dfrac{m_p\omega^2}{i\kappa_2 E_2 S_2}\right)\left(1+\dfrac{C_k}{i\kappa_1 E_1 S_1}\right)}, \tag{5}$$

$$V = -\frac{\dfrac{C_k}{i\kappa_2 E_2 S_2}+\left(1-\dfrac{m_p\omega^2}{i\kappa_2 E_2 S_2}\right)\left(1-\dfrac{C_k}{i\kappa_1 E_1 S_1}\right)}{\dfrac{C_k}{i\kappa_2 E_2 S_2}+\left(1-\dfrac{m_p\omega^2}{i\kappa_2 E_2 S_2}\right)\left(1+\dfrac{C_k}{i\kappa_1 E_1 S_1}\right)}. \tag{6}$$

Можно показать, что при m_p=0 и $C_k \to \infty$ формулы (5, 6) переходят соответственно в формулы, соответствующие просто скачку площади поперечного сечения.

Из формул (5, 6) легко заметить, что прохождение волны через препятствие не обладает свойством симметрии. То есть, если при падении волны слева направо коэффициенты прохождения и отражения равны W_{12}, V_{12}, а при падении справа налево – W_{21}, V_{21}, то в общем случае $W_{12} \neq W_{21}$, $V_{12} \neq V_{21}$. Это замечание касается и других типов препятствий.

Если участки до и после препятствия изготовлены из одинакового материала, то $E_1=E_2=E$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa=\omega/c_0$. На рис. 2 показан график модуля коэффициента прохождения $|W|$ в зависимости от m_p и C_k при значениях $\omega=5\cdot10^4$; $15\cdot10^4$; $25\cdot10^4$ с$^{-1}$. Расчеты проводились при $E=2,1\cdot10^{11}$ Па; $\kappa=\omega/c_0$, c_0=5100 м/с (материал сталь) и $S_1=S_2$=0,00196 м^2, что соответствует диаметру 50 мм примыкающих к препятствию сплошных цилиндрических участков.

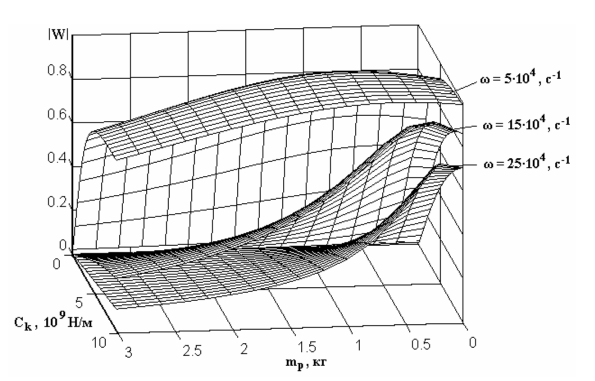


Рис. 2. *Зависимость коэффициента прохождения |W| от массы m_p и жесткости C_k для ряда значений ω*

Анализ графиков приводит к выводу, что при определенных параметрах происходит сильное подавление высокочастотных составляющих падающей волны. Эффекты, возникающие при этом, показаны на рис. 4 (сглаживание профиля, потери энергии).

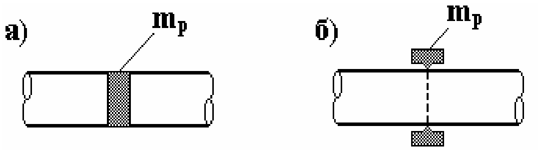


Рис. 3. *Возможные варианты моделирования препятствия абсолютно жесткой пластиной*

В некоторых случаях оказывается, что сжимаемость того или иного малого участке бурового инструмента велика и практически не играет роли. Например, когда жесткость рассматриваемого участка существенно больше жесткости примыкающих элементов. Тогда этот участок можно приближенно считать несжимаемым телом, движущимся как единое целое (рис. 3, *а*). При таком подходе длина участка несущественна, и его можно считать пластиной исчезающе малой толщины, но обладающей массой m_p при $C_k \to \infty$. Аналогичная ситуация возникает при взаимодействии распространяющейся волны с различного рода буртиками, как показано на рис 3, *б*. Если длина буртика мала по сравнению с длиной волны, то выступающую часть буртика можно также считать пластиной исчезающе малой толщины.

На рис. 4 показано изменение профиля падающей волны при массе пластины m_p=0; 2; 4 кг, $C_k=\infty$, причем энергия падающей волны взята за единицу. Графики построены при величине площади $S_2=S_1$=0,00196 м^2, что соответствует диаметру 50 мм примыкающих к пластине сплошных цилиндрических участков, и модуле упругости материала ударного инструмента $E=2,1\cdot10^{11}$ Па (сталь). Из анализа графиков следует, что увеличение массы пластины приводит к значительному сглаживанию волны, сопровождающееся потерей энергии. Так, например, потери энергии при массе пластины, равной 4 кг, достигают почти 20 %.

Таким образом, для повышения коэффициента полезного действия ударных машин при проектировании ударного инструмента необходимо выби-

рать массу различного рода буртиков, утолщений и т.п. по возможности минимальной.

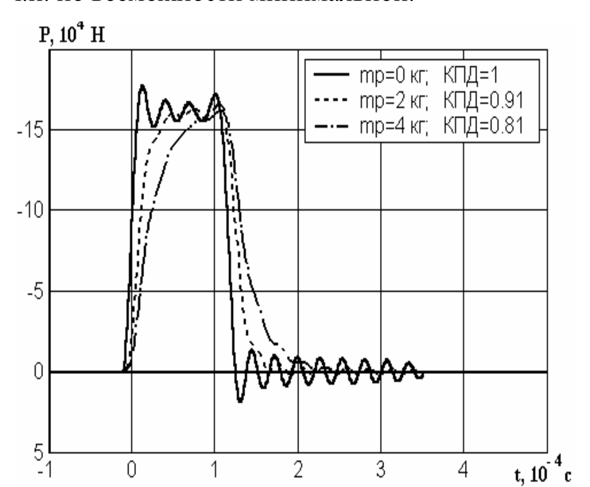


Рис. 4. *Трансформация профиля волны в зависимости от массы препятствия*

Взаимодействие двух штанг ударного инструмента в месте их контакта охарактеризуется коэффициентом жесткости. Вследствие малости области контакта можно считать, что эта область находится в состоянии квазистатического взаимодействия. При таком подходе контакт можно имитировать безмассовой пластиной исчезающе малой толщины с коэффициентом жесткости равным жесткости контакта. Аналогичная ситуация возникает в случае, если между штангами имеется упругая вставка (рис. 5, *а*). При выполнении неравенства $l_v<\lambda_0$ можно пренебречь длиной вставки l_v и имитировать вставку безмассовой пластиной исчезающе малой толщины с коэффициентом жесткости равным жесткости вставки (рис. 5, *б*). В этом случае коэффициенты W, V также определяются формулами (5, 6), но с m_p=0.

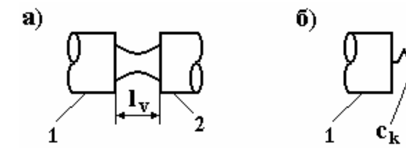


Рис. 5. *Препятствие в виде упругого элемента а) и моделирование его работы б)*

Рассмотрим частные случаи. Если пластина несжимаема, т.е. $C_k\to\infty$, то выражения (5, 6) соответствуют просто границе раздела участков с различными параметрами. При $C_k\to 0$, т.е. при малой жесткости пластины, $W\to 0$, $V\to -1$ и, следовательно, отражение от препятствия практически полное.

Если примыкающие к пластине участки изготовлены из одинакового материала, то есть $E_1=E_2=E$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa=\omega/c_0$, то (5, 6) можно представить в виде

$$W=\frac{2C_kS_2}{i\kappa ES_2S_1+C_k(S_2+S_1)}, \qquad (7)$$

$$V=\frac{-i\kappa ES_2S_1+C_k(S_2-S_1)}{i\kappa ES_2S_1+C_k(S_2+S_1)}. \qquad (8)$$

Рассмотрим основные выводы, следующие из формул (7, 8) и обусловленные коэффициентом жесткости пластины. Положим $S_2=S_1$=0,00196 м^2, что соответствует диаметру 50 мм примыкающих к пластине сплошных цилиндрических участков. Модуль упругости материала ударного инструмента возьмем равным E=2,1·10^{11} Па (сталь). На рис. 6 представлена зависимость модуля коэффициента прохождения из (7) от частоты ω ($\kappa=\omega/c_0$) для различных значений C_k. Анализ графиков приводит к выводу, что с уменьшением значения жесткости контакта C_k существенно уменьшается модуль коэффициента передачи в области высоких частот. Для значений жесткости $C_k\geq 10^{12}$ Н/м прохождение волны практически полное. При $C_k<10^9$ Н/м для высоких частот волновод практически заперт.

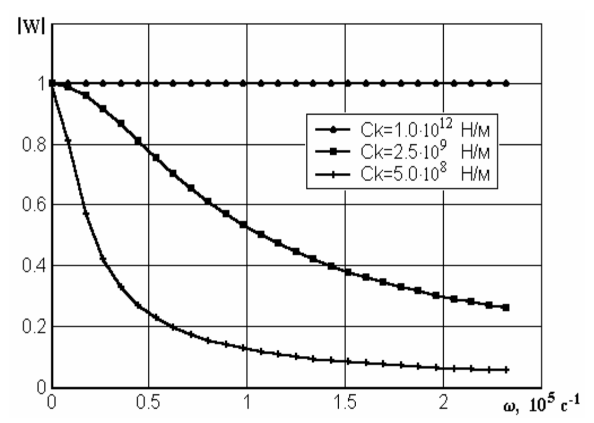


Рис. 6. *Зависимость модуля коэффициента прохождения от частоты ω при m_p=0*

На рис. 7 показано изменение профиля падающей волны при тех же значениях жесткости контакта, причем энергия падающей волны взята за единицу. Из анализа графиков следует, что уменьшение жесткости контакта приводит к значительному сглаживанию волны, сопровождающееся потерей энергии. Так, например, потери энергии при жесткости C_k=5,0·10^8 Н/м превышают 50 %.

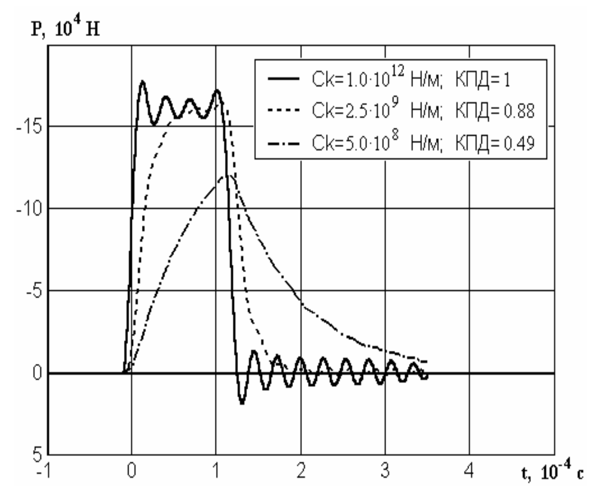


Рис. 7. *Трансформация профиля волны в зависимости от контактной жесткости препятствия*

Соотношения, полученные выше, основаны на граничном условии (4), выражающем линейную зависимость силы от смещения. Однако во многих практически важных случаях зависимость силы от смещения является нелинейной. Тогда, если обозначить $u=u_2-u_1$, указанную нелинейную зависимость можно представить в виде

$$P = C_H u^n, \qquad (9)$$

где C_H – постоянный коэффициент, n – показатель нелинейности. Например, при контактировании сферических поверхностей с радиусами кривизны R_1 и R_2 зависимость (9) имеет вид

$$P = C_H u^{\frac{3}{2}},$$

где

$$C_H = \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \cdot \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}, \qquad (10)$$

ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга контактирующих тел (предполагается, что материалы тел одинаковы). Эта зависимость впервые было получена Герцем и носит его имя.

Линеаризуем зависимость (10). Выберем в качестве эквивалентной линейной характеристики соотношение (4), которое запишем в виде $P=C_k u$. Считаем, что контактирующие поверхности предварительно сжаты силой P_c. Тогда эквивалентная линейная пластина будет иметь жесткость $C_k=n\cdot\sqrt[n]{C_H}\cdot\sqrt[n]{P_c^{n-1}}$.

Из всех параметров в правой части последнего соотношения некоторой неопределенностью обладает значение P_c. Сравнение экспериментальных и расчетных данных по прохождению волн через контакты боек-хвостовик и штанга-штанга дает возможность рекомендовать для P_c величину, равную половине среднего значения продольной силы, развиваемой волной. За среднее усилие в волне для контакта боек-хвостовик можно принять величину, рассчитанную исходя из теоремы об изменении количества движения: $m_b v_0=P_{\max}\cdot T_y$, где m_b, v_0 – масса и скорость бойка. Учитывая, что $T_y=2l_b/c_0$, где l_b – длина бойка, c_0 – скорость распространения волн, будем иметь $P_c = \frac{m_b v_0 c_0}{4 l_b}$ и

$$C_k = n \cdot \sqrt[n]{C_H} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{m_b v_0 c_0}{4 l_b}\right)^{n-1}}. \qquad (11)$$

Формула (11)дает возможность по параметрам нелинейного взаимодействия в контакте вычислить жесткость эквивалентной линейной пластины.

При контакте сферических поверхностей n=3/2, а C_H определяется формулой (10). Тогда из (11) следует

$$C_k = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{E^2}{(1-\nu^2)^2} \cdot P_c \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}.$$

В последней формуле представлена зависимость эквивалентной жесткости линейной пластины C_k от усилия предварительного сжатия контактирующих поверхностей P_c для различных значений приведенного радиуса $R_{пр}=R_1R_2/(R_1+R_2)$. Отметим, что при увеличении значений R_1, R_2 возрастает и $R_{пр}$. То есть более плоским контактирующим поверхностям соответствуют большие значения $R_{пр}$. Из анализа зависимостей следует, что с ростом как P_c, так и $R_{пр}$ возрастает жесткость пластины. Отсюда следует, что увеличение усилия сжатия торцов штанг и выбор торцов более плоскими приводит к возрастанию жесткости контакта и, следовательно, коэффициента прохождения волн через стыковые соединения.

Рассмотрим случай, показанный на рис. 5, *а*. Жесткость упругой вставки можно рассчитать по известной из курса сопротивления материалов формуле. Пользуясь введенными выше обозначениями, запишем выражение, связывающее укорочение стержня u и действующую на него продольную силу P:

$$u = \int_0^{l_v} \frac{Pdz}{ES(z)}.$$

Тогда учитывая, что P, E=const, получим

$$C_k = E \Big/ \int_0^{l_v} \frac{dz}{S(z)}.$$

Если при этом $S(z)$=const, то $C_k = \frac{ES}{l_v}$.

Выводы

1. Приведена зависимость модуля коэффициента прохождения волн через стыковые соединения от частоты ω.
2. Уменьшение жесткости контакта приводит к значительному сглаживанию волны и сопровождается потерей энергии.
3. Для повышения КПД ударных машин при проектировании ударного инструмента необходимо выбирать массу различного рода буртиков, утолщений и т.п. по возможности минимальной.
4. Увеличение усилия сжатия торцов штанг и выбор торцов более плоскими приводит к возрастанию жесткости контакта и, следовательно, коэффициента прохождения волн через стыковые соединения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов К.И., Латышев В.А., Андреев В.Д. Техника бурения при разработке месторождений полезных ископаемых. – М.: Недра, 1987. – 272 с.
2. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. – М.: Наука, 1979. – 296 с.